数学コラム(9)

ジッヘルマン・ダイス

西山豊

２つのサイコロを使った確率の問題がある．サイコロの目の和は１＋１の２から６＋６の 12 まで分布するが，これと同じ確率分布を持つサイコロが，普通のサイコロ以外にもうひと組あり，それは

1，3，4，5，6，8 と 1，2，2，3，3，4

である．このような奇妙なサイコロを考案したのは，ジョージ・ジッヘルマン（George Sicherman）という人で，1978 年 2 月号のサイエンティフィック・アメリカン誌の 19 ページに M. ガードナーの紹介記事が掲載されている．

ウソだと思うなら検算してみよう．表計算ソフトを使って先頭行に１セルあけて 1，3，4，5，6，8 を入力し，左端の列に 1 セルあけて 1，2，2，3，3，4 を入力し，６×６のマス目に２つの数字の合計を計算してみる．そして，その値が２から 12 までの度数分布表を作ってみると，どうだろうか．普通のサイコロ２つの目の和の度数分布と奇妙なサイコロの度数分布が一致することに気付くであろう．

この組合せがユニークな解であることは，紙と鉛筆で証明することができる．紙と鉛筆では時間がかかるという人には，簡単なプログラムを作成して条件に一致する組合せを選び出すことができる．

また，サイコロは正６面体であるが，正多面体はこれ以外に正 4 面体，正 8 面体，正 12 面体，正 20 面体がある．これらもサイコロと考えた場合，同じような確率問題を設定することができる．プログラムを使えば，正８面体の場合は，つぎの 3 つの解がみつかる．

1，3，3，5，5，7，7，9 と 1，2，2，3，5，6，6，7
1，2，5，5，6，6，9，10 と 1，2，3，3，4，4，5，6
1，3，5，5，7，7，9，11 と 1，2，2，3，3，4，4，5

正 4 面体の場合は，１つの解がみつかる．

M. ガードナーの記事を読んだ読者から証明に関する手紙が彼のもとに届く．そのうちエレガントな解法は J.A. ガリアンや D.M. ブロラインに代表される次の生成関数（多項式）

$$P(x)=\frac{1}{6}\left(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)$$

を用いるものであった．項の数は全部で 6 個あるが，一般項 ax^k はサイコロの目の和が k となるのは a 個あると読む．次数は目の和に，係数は度数に対応している．

サイコロが２つだから，この多項式を自乗する．そして自乗した多項式を展開し，それを別の形で因数分解しなおすと次のようになる．

$$\left(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)^2$$
$$=\left(x+x^3+x^4+x^5+x^6+x^8\right)\left(x+2x^2+2x^3+x^4\right)$$

左辺が普通のサイコロが 2 個，右辺が奇妙なサイコロが 2 個の数字を表している．右辺の第一項から 1，3，4，5，6，8 の目を持つサイコロが，第二項から 1，2，2，3，3，4 の目を持つサイコロが計算される．多項式の因数分解を使えば，正 12 面体の場合の解が７個を見つけることができる．

先日，ダイスの考案者であるジョージ・ジッヘルマンさんからメールが届く．私の英語論文 (Sicherman Dice) を偶然見つけたということで「サイコロは考案したが商品としては売り出していない．数社が私に連絡もなしで商品を売り出している」というコメントがあった．これは私の思い違いなので訂正の返事を出しておいた．奇妙なサイコロを考案する人がいれば，多項式を用いてエレガントな証明を与える人がいる．数学愛好家にとっては至福の時で，このようなことだけを考えていれば世界平和が実現できるのだが…

（にしやまゆたか／大阪経済大学）